Hans-Jürgen Matschull
Lichtenberg-Gymnasium Cuxhaven

Inkompetenzkompensationsinkompetenz

oder

Der verlorene Halbkreis

6. März 2017

Es fängt ganz harmlos an. In einer Klausur sollen die Schüler des 11. Klasse, genauer die Schüler eines Kurses auf „erhöhtem Niveau”, die Fläche eines Halbkreises berechnen. Um die Aufgabe nicht zu kompliziert zu machen, hat der Halbkreis den Radius 1. Den meisten Schülern gelingt es, eine Fläche von $\pi/2$ zu ermitteln. So weit, so gut. Wenn da nicht der Rest der Geschichte wäre.

Natürlich ist die Aufgabe eingebettet in das aktuelle Thema „Integralrechnung“, und so lautet sie nicht einfach: „Berechnen Sie die Fläche eines Halbkreises mit Radius 1“, sondern:

$$\text{Berechnen Sie } \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Nun kann von einem Schüler sicher nicht erwartet werden, ohne Hilfsmittel eine Stammfunktion zu $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ zu ermitteln. Das soll es auch nicht. Weder verlangt das der Lehrplan, noch wäre dies ein sinnvolles Ziel der Schulmathematik. Aber daran soll es nicht scheitern. Denn der Schüler hat ein Hilfsmittel, in diesem Fall ein Notebook, auf dem das CAS von *GeoGebra* zur Verfügung steht. Und diesem bereitet es sichtlich wenig Schwierigkeiten, innerhalb einiger Millisekunden die Stammfunktion

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$$

auszuwerfen. Was zu ersten verwunderten Gesichtern führt und mehrere Schüler dazu veranlasst, zu fragen, was dieses merkwürdige „arcsin” wohl bedeuten würde. Keine große Sache, der Lehrer beantwortet die Frage gerne, da im Unterricht bisher nur die Schreibweise $\sin^{-1}$ verwendet wurde, und auch die entsprechende Taste auf dem Taschenrechner so beschriftet ist. Die Schüler, die sich zu fragen trauen, geben sich mit der Antwort zufrieden, oder trauen sich jedenfalls nicht, weiter nachzuhaken.

Warum die Schüler hier überhaupt eine Stammfunktion bestimmen, ist nicht sofort offensichtlich. Denn natürlich kann *GeoGebra* das bestimmte Integral auch direkt ausrechnen. Wie auch immer, den meisten Schülern gelingt es, mit oder ohne Hilfe des Rechners auch noch $F(1) - F(-1) = \pi/2$ auszurechnen. Warum die Schüler zuerst die Stammfunktion bestimmen, und manche sogar den letzten Teil der Rechnung zu Fuß durchführen, wird uns gleich klar werden. Die Aufgabe hat nämlich noch einen Zusatz:

> Schreiben Sie die Lösung so auf, dass sie ohne Hilfsmittel nachvollziehbar ist.

Das ist eine übliche und den Schülern bekannte Standardklausel, die im wesentlichen bedeutet: Natürlich dürfen Sie den Computer verwenden, um die Lösung zu finden, das heißt in diesem Fall, um das Integral zu berechnen. Denn das kann ja schlecht unterbunden werden, wenn der Rechner während der Klausur auf dem Tisch steht. Aber die Lösung soll so dargestellt werden, dass daraus auf ein grundlegendes Verständnis geschlossen werden kann, das über das reine Eingeben eines Integrals in den Rechner hinausgeht.

Auch im Abitur wird das bei einzelnen Aufgaben verlangt, und sogar der *Bundeswettbewerb Mathematik* stellt eine ähnlich lautende Klausel auf. Man kann sie auch so deuten, dass der Leser die Lösung nachvollziehen können soll, ohne auf die korrekte Funktion des Rechners vertrauen zu müssen. Unabhängig vom Für und Wider des Rechnereinsatzes in Klausuren, um den es hier nicht gehen soll, ist diese Klausel durchaus sinnvoll. Letztlich würde man genau das auch von einem talentierten Nachwuchsmathematiker verlangen, wenn er einen Beweis für die Riemannsche Vermutung vorlegt. Natürlich kann er seinen Rechner verwenden, um die ersten 10^8 Nullstellen der Zetafunktion zu berechnen und darin ein bisher unerkanntes Muster zu entdecken. Aber der vorgelegte Beweis muss auch ohne Rechner nachvollziehbar sein.

Insofern kann man dem Rechnereinsatz in Kombination mit der Klausel der „hilfsmittelfreien Darstellung der Lösung“ durchaus etwas Positives abgewinnen. Hier wird echtes mathematisches Argumentieren, ja im Ansatz sogar so etwas wie Beweisen erwartet. Die Frage, die sich jedoch unmittelbar stellt, ist die nach der praktischen Umsetzung. Funktioniert die Klausel denn überhaupt? Wird durch solche Aufgaben tatsächlich die Fähigkeit geprüft, mit Unterstützung des Rechners echte Mathematik zu betreiben? Die Antwort ist: nicht unbedingt.

Eine einfachere erste Version der oben zitierten Aufgabe lautet nämlich:

> Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^1 \left(4x - 4x^2\right) \mathrm{d}x.$

Fast alle Schüler lösen diese Aufgabe ohne Probleme. Die typische Lösung, bereinigt um die nicht immer ganz einwandfreie Schreibweise, sieht ungefähr so aus:

> Eine Stammfunktion zu $f(x) = 4x - 4x^2$ ist $F(x) = 2x^2 - \dfrac{4}{3}x^3$.
>
> Daraus ergibt sich für das gesuchte Integral $F(1) - F(0) = 2 - \dfrac{4}{3} - 0 = \dfrac{2}{3}$.

Unabhängig davon, ob die Stammfunktion zu Fuß oder mit dem Rechner bestimmt wurde, ist die Lösung für jeden, der die Grundlagen der Differential- und Integralrechnung verstanden hat, unmittelbar nachvollziehbar und als richtig erkennbar. Wer die Lösung so aufgeschrieben hat, hat diese Grundlagen offenbar verstanden und außerdem gezeigt, die Klausel sinnvoll umzusetzen, also im Sinne der oben genannten Interpretation mathematisch zu argumentieren.

Wirklich? Nein, nicht wirklich. Denn die typische Lösung zu der eingangs zitierten zweiten Version der Aufgabe sieht so aus:

Eine Stammfunktion zu $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ist $F(x) = \frac{1}{2}\left(x\sqrt{1-x^2} + \arcsin(x)\right)$.

Daraus folgt $F(1) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{1-1^2} + \arcsin(1)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot 0 + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

und $F(-1) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot \sqrt{1-(-1)^2} + \arcsin(-1)\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 \cdot 0 - \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$.

Daraus ergibt sich für das gesuchte Integral $F(1) - F(-1) = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{2}$.

Hier ist ganz offensichtlich etwas schiefgegangen. Dass es sich bei $F(x)$ um eine Stammfunktion von $f(x)$ handelt, ist alles andere als „ohne Hilfsmittel nachvollziehbar". Jedenfalls für einen durchschnittlich begabten Schüler.

Möglich ist es zwar schon, die Stammfunktion im Kopf zu bestimmen. Die Fläche unter dem Halbkreis über dem Intervall $[0; x]$ kann in ein rechtwinkliges Dreieck mit den Seiten x und $\sqrt{1-x^2}$ sowie einen Kreissektor mit Winkel $\arcsin(x)$ zerlegt werden. Daraus ergibt sich als Fläche der angegebene Term für $F(x)$. Damit wird sich aber kein Schüler herausreden können. Denn wer auf diese Idee kommt, der erkennt bereits vorher, dass das gesuche Integral einfach die Fläche des Halbkreises ist.

Man hätte die Lösung noch „retten" können, indem man die Stammfunktion ableitet und dadurch ihre Richtigkeit nachweist. Diese Methode ist bekannt und entspricht voll und ganz dem oben beschriebenen mathematischen Argumentieren. Es kommt nicht darauf an, wie man die Stammfunktion findet, sondern nur auf den Beweis, dass es sich um eine solche handelt. Der eine oder andere Schüler mag kurz mit dieser Idee gespielt haben. Er hat sie aber sicher gleich wieder verworfen, weil dieser Funktion nur mit einem großen Arsenal von zwar bekannten, aber in abschreckender Weise verschachtelten Ableitungsregeln beizukommen wäre.

Es kann also sicher ausgeschlossen werden, dass ein Schüler die Stammfunktion ohne Hilfmittel nachvollziehen oder sogar finden konnte, es aber nicht für nötig hielt, seine Überlegungen aufzuschreiben, weil er sie für genauso offensichtlich hielt wie im Falle eines Polynoms zweiten Grades. Aber was ist dann der Grund, die Lösung so stehen zu lassen, ohne wenigstens ansatzweise zu versuchen, sie hilfsmittelfrei nachvollziehbar zu machen?

Drei mögliche Erklärungen bieten sich an. Die erste ist, dass eine solche Notwendigkeit nicht gesehen wird, weil die Klausel nicht bzw. falsch verstanden wurde. Der zweite Teil der typischen Lösung, die manchmal sehr ausführlich und kleinschrittig dargestellte Berechnung von $F(1)$ und $F(-1)$, deutet auf diese Variante hin. Eine hilfsmittelfrei nachvollziehbare Lösung wird verwechselt mit einer möglichst kleinschrittig ausgeführten Lösung. Der eine nicht unmittelbar nachvollziehbare große Schritt wird durch die vielen anderen (unnötig) kleinen Zwischenschritte quasi ausgeglichen.

Das entspricht natürlich überhaupt nicht mehr dem Wesen einer mathematischen Argumentation. Außerdem stellt sich die Frage, wie denn in diesem Fall die typische Lösung der ersten Version der Aufgabe zu interpretieren ist. Wenn der Schüler auch hier nichts anderes getan hat, als möglichst viele kleine Schitte aufzuschreiben, von der jeder einzelne mit dem Rechner durchgeführt wurde, dann entspricht die Lösung zwar formal der Aufgabenstellung. Aber der Schüler hat durch das Abschreiben der Rechnerausgaben nur rein zufällig eine hilfsmittelfrei nachvollziehbare Lösung produziert. Ohne die zweite Version wäre das nur nie aufgefallen.

Die zweite denkbare Erklärung ist eine falsche Einschätzung der eigenen mathematischen Fähigkeiten, und zwar ironischerweise eine Unterschätzung derselben. Vielleicht hat sich der Schüler gedacht, er könne die Aufgabe nur deshalb nicht ohne Rechner lösen, weil ihm etwas entgangen oder entfallen ist, oder weil er etwas nicht verstanden hat. Vielleicht die Sache mit dem arcsin. Ein durchschittlich begabter Schüler, so seine Vorstellung, der im Unterricht aufgepasst und ernsthaft gelernt hat, müsste diese Funktion integrieren können, sonst würde die Aufgabe so nicht in der Klausur vorkommen.

Dank des Rechners bietet sich in diesem Fall ein Ausweg an. Der Schüler tut so, als würde er die zweite Version der Aufgabe genauso souverän lösen wie die erste Version, indem er die Lösung einfach wörtlich übernimmt und nur die entsprechenden Formeln durch die Ausgaben des Rechners ersetzt. Zugegeben, die Situation ist verwirrend und ein bisschen unfair. Der Schüler versucht, seine mangelnde Fähigkeit durch eine geschickte Formulierung der Lösung zu verschleiern, geht aber genau dadurch dem Prüfer in die Falle. Aber nicht, weil ihm die Verschleierung nicht gelingt, sondern weil das, was er durch die Verschleierung vorzutäuschen versucht, gar nicht von ihm erwartet wird und auch gar nicht erwartet werden kann.

Aber was folgt daraus für die erste Version der Aufgabe? Vielleicht hat der Schüler dort genau die gleiche Strategie verwendet, um seine mangelnde Fähigkeit, die Aufgabe ohne Rechner zu lösen oder zumindest die Lösung zu verstehen, zu verschleiern. In diesem Fall wäre ihm dies gelungen. Er hätte erfolgreich eine Fähigkeit vorgetäuscht, die von ihm erwartet wurde. Die einfache Version der Aufgabe hätte auch in diesem Fall ihren Zweck verfehlt, nämlich die Fähigkeit zur mathematischen Argumentation ohne Hilfsmittel zu prüfen. Und auch hier fällt das nur wegen der gleichlautenden, aber fehlgeschlagenen Lösung für die zweite Version auf.

Eine dritte mögliche Erklärung für die lückenhafte Lösung ist, dass der Schüler richtigerweise erkannt hat, dass die Aufgabe auf diesem Weg mit den aus dem Unterricht bekannten Mitteln nicht lösbar ist. Er versucht nichts zu vertuschen, sondern schreibt einfach alles auf, was ihm dazu einfällt und was der Rechner ihm sagt. Aber dann stellt sich die Frage, warum er nicht nach einer alternativen Lösung sucht. Die Aufgabe enthält nämlich noch einen weiteren Teil, vor der eigentlichen Berechnung des Integrals:

> Stellen Sie das Integral als Fläche im Koordinatensystem dar.

Auch hier hilft der Rechner gerne weiter. Er zeichnet den Graphen, der nur noch abgezeichnet werden muss. *GeoGebra* markiert sogar die Fläche farbig, wenn man das bestimmte Integral eingibt. Auch bei dieser Aufgabe stellt sich natürlich die berechtigte Frage, ob hier tatsächlich eine mathematische „Kompetenz“ abgefragt wurde oder lediglich die „kompetente“ Bedienung des Rechners.

Aber das ist nicht der Punkt. Denn die Zeichenaufgabe wurde vom Verfasser aus zwei Gründen eingebaut. Erstens als eine Aufgabe aus dem niedrigsten Anforderungsbereich, damit jeder zumindest die absolut grundlegenden Kenntnisse nachweisen kann. Und zweitens als ein überhaupt nicht versteckter Hinweis zur Lösung der Halbkreis-Aufgabe. Der Halbkreis war für jeden klar auf dem Bildschirm erkennbar und wurde auch entspechend abgezeichnet. Und spätestens das Ergebnis $\pi/2$, obwohl in der Aufgabe nirgends ein π vorkommt, muss doch die Assoziation „Kreis“ auslösen. Erstaunlicherweise hat nur einer von 24 Schülern es überhaupt für erwähnenswert gehalten, dass es sich um einen Halbkreis handelt, ohne jedoch diese Erkenntnis zur Bestimmung des Integrals heranzuziehen.

Das führt nun doch wieder zu einer generellen Kritik am Einsatz des Rechners in Klausuren. Die Möglichkeit, auch solche Aufgaben im Hand- bzw. Tastenumdrehen zu lösen, die ohne den Rechner ein bisschen Kreativität erfordern würden, macht es unnötig, den Geist schweifen zu lassen und nach alternativen Wegen zu suchen. Er verstellt sogar regelrecht den Blick dafür. Nachdem der Rechner die Stammfunktion ausgeworfen hat, wird nur noch versucht, den so vorgezeichneten Weg so „hilfmittelfrei nachvollziehbar“ wie möglich aufzuschreiben. Alternativen gibt es dann nicht mehr, denn der Rechner hat gesprochen und damit die Lösung einschließlich des Weges dahin festgelegt.

Dass hier die Lösung zu Fuß sogar einfacher gewesen wäre als allein das mühsame buchstabenweise Abschreiben der Stammfunktion, liegt anscheinend jenseits aller Vorstellungen. Oder das Vertrauen in die eigenen mathematischen Fähigkeiten ist so gering, dass man sich schlicht nicht traut, zu schreiben:

> Der Funktionsgraph ist ein Halbkreis mit Radius 1.
> Seine Fläche und damit das Integral ist $\pi/2$.

Aber es soll hier, wie bereits erwähnt, nicht um den Rechnereinsatz an sich gehen. Auch nicht um Kritik an der mangelnden Kreativität der Schüler. Jedenfalls nicht nur. Sondern um die Frage, ob die Klausel der „hilfsmittelfrei nachvollziehbaren“ Lösung ihren Zweck erfüllt. Das kleine Experiment mit den zwei Versionen der ansonsten identischen Aufgabe zeigt, dass dies nicht der Fall ist. Jedenfalls dann nicht, wenn die geforderte hilfsmittelfreie Lösung gar nicht von einer kleinschrittig zerlegten Rechnerausgabe unterscheidbar ist.

Da solche Aufgaben aber die Regel sind, auch im Abitur, verfehlen sie nicht nur ihren Zweck, sondern fördern sogar kontraproduktive Strategien. Der Rechner gibt mir Sicherheit, also klammere ich mich daran. Der Versuch, meine Lösung erst einmal selbst zu verstehen, oder nach einer zu suchen, die ich verstehe, und diese dann nachvollziehbar aufzuschreiben, das ist mir zu riskant. Sicherer ist es, die unverstandenen Rechnerausgaben ohne weiter nachzudenken hintereinander aufzuschreiben. Was der Rechner macht, wird schon stimmen.

Erfahrungsgemäß komme ich damit sogar bei solchen Aufgaben durch, die explizit eine hilfsmittelfrei nachvollziehbare Lösung verlangen. Weil diese in Wirklichkeit gar nicht die Fähigkeit prüfen, ohne Rechner mathematisch zu argumentieren. Sondern auch ein Vortäuschen derselben zulassen, indem möglichst viele einzelne Rechnerausgaben so angeordnet werden, dass sie wie eine ohne Rechner gefundene und nachvollziehbare Lösung aussehen. Vielleicht ist das sogar, aus welchen Gründen auch immer, gewollt. Aber das kann’s doch nicht sein.