Hans-Jürgen Matschull
Lichtenberg-Gymnasium Cuxhaven

CAS Kills Math Skills

oder

Die wahrscheinlich absurdeste Kapitänsaufgabe seit Erfindung des Abiturs

18. Juni 2017

Es war wieder Abitur in Niedersachsen, und heute betrachten wir unabhängig von irgendeinem Sachzusammenhang die Funktionenschar f_k mit

$$f_k(x) = \frac{10}{1 + 9\,e^{-10\,k\,x}}, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k > 0.$$

Gemeint ist natürlich die Funktionenschar f, aber das wurde bereits im vorigen Jahr erörtert und soll uns hier nicht weiter stören. Es spielt ohnehin keine Rolle, denn die *Schar* als solche, oder wie der Mathematiker sagen würden, die *Menge* aller dieser Funktionen, ist gar nicht Gegenstand der Untersuchung, sondern nur die einzelnen Funktionen.

Wir erfahren vom Aufgabensteller: Jede solche Funktion, genauer natürlich der Graph jeder solchen Funktion, hat einen Wendepunkt bei

$$W_k = \left(\frac{\ln(3)}{5\,k} \,\middle|\, 5 \right).$$

Der besseren Lesbarkeit wegen haben wir hier ein Gleichheitszeichen ergänzt, über das vor einem Jahr auch schon viel geredet wurde. Desweiteren wird mitgeteilt, dass die Tangente an den Graphen von f_k in diesem Punkt t_k heißt, und dass diese eine Nullstelle hat, und zwar bei

$$x = \frac{\ln(3) - 1}{5\,k}.$$

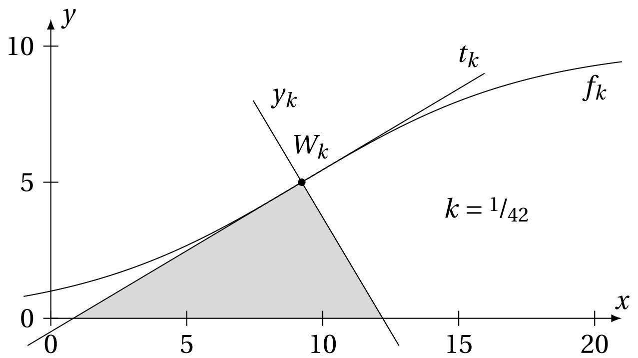
Und, wer hätte das gedacht, es existiert eine zu t_k senkrechte Gerade y_k, die ebenfalls durch W_k verläuft. Und wir erfahren sogar, dass diese Gerade durch y_k mit

$$y_k(x) = -\frac{1}{25\,k}\,x + 5 + \frac{\ln(3)}{125\,k^2}$$

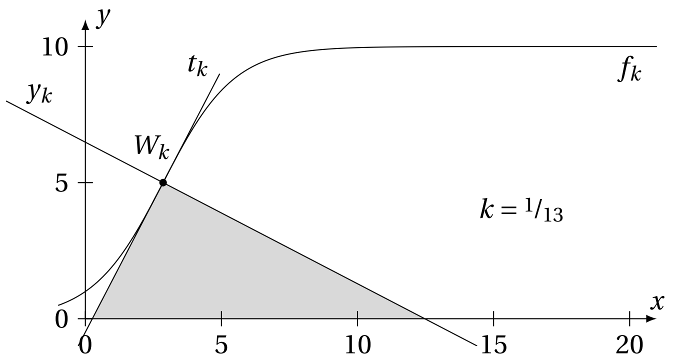
beschrieben wird. Dabei wird sorgfältig auf die Notation geachtet, aber nicht mehr so genau zwischen einer Funktion und ihrem Graphen unterschieden, obwohl das zwei Sätze davor noch ziemlich wichtig war.

Egal. Wir erfahren auch noch, dass die Tangente t_k, die Gerade y_k und die x-Achse für jedes $k > 0$ ein Dreieck einschließen. Immerhin, klar formuliert im Singular und mit einer konsistenten Indizierung. Denn man hätte auch sagen können, um ein wenig Verwirrung zu stiften, dass die Tangenten t_k, die Geraden y_k und die x_k-Achsen Dreiecke bilden. Oder so ähnlich. Zumindest in dieser Hinsicht ein deutlicher Fortschritt, wenn man sich an die Kegel vom letzten Jahr erinnert. Man soll die Hoffnung nie aufgeben.

Nun aber genug Informationen. Vielleicht machen wir eine kurze Pause und veranschaulichen die Situation durch eine Skizze. So sieht das aus:



Oder so:



Und was ist nun die Aufgabe? Spannen wir uns nicht länger auf die Tangente. Sie lautet:

Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal werden kann.

Aha. Erst einmal kommt die Ernüchterung: *kann*? Kennen wir das nicht auch schon vom letzten Jahr? Damals ging es auch um irgendwelche Wendepunkte, die irgendwo liegen *können* oder auch nicht. Man darf wohl doch nicht zu viel erwarten. Aber diesmal *kann* man vielleicht erraten, was gemeint ist.

Unser Versuch: Es ist zu untersuchen, ob es unter allen so konstruierten Dreiecken eins mit minimaler Fläche gibt. Trivialerweise gibt es eine untere Schranke für die Dreiecksfläche, und somit auch eine größte untere Schranke. Aber wird diese Schranke für einen bestimmten Wert von k angenommen? Das muss wohl die eigentliche Frage sein. Aber so kann man sie nicht stellen, denn die Schüler würden sie nicht verstehen. Jedenfalls ist sie nicht trivial, selbst wenn man stillschweigend annimmt, dass die Fläche stetig von k abhängt, denn der Definitionsbereich von k ist nicht kompakt.

Ob die Frage wirklich so gemeint ist, können wir aufgrund unserer noch immer nicht voll ausgebildeten telepathischen Fähigkeiten nur mit Hilfe der Musterlösung feststellen. Werfen wir also einen Blick in diese, und achten wir dabei besonders darauf, ob auch wirklich alle Informationen aus der Aufgabe eingebracht werden, so wie das bei einer guten Kaptänsaufgabe sein soll. Und natürlich auch darauf, ob das CAS angemessen, das heißt so intensiv wie möglich eingesetzt wird.

Zunächst wird von uns erwartet, dass wir die Nullstelle der Normale y_k bestimmen. Dazu brauchen wir die Funktionsgleichung, die uns in der Aufgabe verabreicht wurde. Wir geben sie in den Rechner ein. Der sagt uns, dass die Nullstelle bei

$$x = 125\,k + \frac{\ln(3)}{5\,k}$$

liegt. Wir haben die erste Herausforderung bestanden und mit dem Rechner eine komplizierte lineare Gleichung gelöst, die nicht nur Brüche enthält, sondern auch die vollkommen irrationale Zahl $\ln(3)$. Gut, dass wir das CAS haben.

Nun sollen wir den Flächeninhalt des Dreiecks berechnen, am besten nach der bekannten oder aus der Formelsammlung entnommenen Formel „Grundseite mal Höhe durch zwei“. Um die Grundseite zu ermitteln, also den Abstand zwischen den beiden Nullstellen, benötigen wir noch die Nullstelle der Tangente t_k, die uns erfreulicherweise in der Aufgabe einfach so gegeben wurde. Wir finden schließlich heraus: die Grundseite hat die Länge g mit

$$g = 125\,k + \frac{\ln(3)}{5\,k} - \frac{\ln(3) - 1}{5\,k},$$

und die Höhe ist h mit $h = 5$. Genau genommen hat die Höhe die Länge h mit $h = 5$. Aber so genau nimmt es die Musterlösung dann doch wieder nicht mit der Mitnotation. Auf jeden Fall können wir das jetzt alles ineinander einsetzen und finden heraus: Der Flächeninhalt kann mit F durch

$$F(k) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(125\,k + \frac{1}{5\,k}\right)$$

beschrieben werden. Was? Ja, man kann durch die vielen fachsprachlichen Präpositionskonstruktionen leicht miteinanderkommen. Hauptsache, man bemüht sich um eine korrekte Ausdruckweise. Ein mathematischer Laie hätte womöglich vollkommen falsch und irreführend formuliert: Die Fläche des Dreiecks ist

$$F(k) = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \left(125\,k + \frac{1}{5\,k}\right).$$

Unser Rechner hat den Term schon ein bisschen vereinfacht, und nun können wir endlich die Frage beantworten: Kann diese Fläche minimal werden? Wir wissen zwar immer noch nicht genau, was damit gemeint ist, aber das müssen wir an dieser Stelle gar nicht mehr. Denn das Schlüsselwort „minimal" veranlasst uns, unverzüglich die übliche Funktionsdiskussionslitanei abspulen. Die ist nämlich dank des CAS-Einsatzes zugunsten der *eigentlichen Mathematik* aus dem modernen Unterricht verschwunden, wird aber in der Prüfung trotzdem erwartet.

Wir lösen also die Gleichung $F'(k) = 0$, was uns die Lösungen $k_3 = -{}^1\!/_{25}$ und $k_4 = {}^1\!/_{25}$ beschert. Ja, das steht da wirklich so da, ganz mit ohne *mit*. Und die Nummerierung hat ihre Ursache in einer hier nicht erwähnten vorherigen Teilaufgabe, in der es bereits zwei k-Werte von spezieller Bedeutung gab. Also insofern alles in Ordnung.

Wir verwerfen die Lösung k_3, da sie außerhalb des Definitionsbereiches von k liegt, verbleiben mit k_4 und stellen fest, auch wieder mit dem Rechner kein Problem, dass $F''(k_4) > 0$ ist. Daraus schließen wir, dass der Flächeninhalt bei k_4 ein lokales Minimum hat, also gemäß der ursprünglichen Frage *minimal werden kann*. Fertig.

Moment. Mit *minimal werden kann* war also gemeint, dass wir feststellen sollten, ob die Dreiecksfläche als Funktion von k ein lokales Minimum hat? Gut, man könnte jetzt aus der Tatsache, dass die Funktion differenzierbar ist und es keine weitere Extremstrelle im Definitionsbereich gibt, schlussfolgern, dass es sich tatsächlich auch um ein globales Minimum handelt. Aber das wird nicht erwartet.

Eher liegt der Schluss nahe, dass das ominöse *kann* in der Aufgabe den gleichen Zweck erfüllt, dem es auch schon im letzten Jahr diente. Man soll gar nicht so genau hinschauen und auf Details achten, oder gar versuchen, die Frage genau zu verstehen. Es geht gar nicht darum, ob es wirklich ein Minimum gibt oder nicht. Die Frage ist, ob die Dreiecksfläche das Potential besitzt, minimal zu werden. Ja, könnte man sagen, das tut sie. Besitzt nicht jede Größe diese Fähigkeit, und ganz besonders jede positive? Aber wenn man das so feststellt, hat man das dann *untersucht*?

Eventuell hilft es, in die *Erläuterungen der Operatoren* zu schauen, also in die Anweisungen zum Ausführen der Anweisungen in den Prüfungsaufgaben, um herauszufinden, was denn eigentlich *untersuchen* heißt. Und tatsächlich, wir werden gleich ein bisschen schlauer. *Untersuchen* bedeutet, *Eigenschaften von Objekten herausfinden und darlegen.* Wir sollen also herausfinden und darlegen, ob die Dreiecksfläche fähig ist, minimal zu werden. Das macht zwar auch nicht mehr Sinn als unser erster Interpretationsversuch ohne Zuhilfenahme der *Erläuterungen.* Aber es war einen Versuch wert.

Wenn solche Aufgabenstellungen zukünftig regelmäßig vorkommen, sollte man die *Erläuterungen* dahingehend ergänzen, nicht nur *Operatoren* zu *erläutern*, sondern auch Modalverben. Untersuchen, ob etwas sein *kann*, bedeutet, man soll in der Aufgabe nach Stichwörtern suchen, diese mit bekannten Kochrezepten assoziieren, und dann ein wenig herumstochern, indem man diese abspult. Auf eine präzise Antwort auf eine nicht vorhandene präzise Frage kann verzichtet werden. Hier ist das Stichwort *minimal*, also spulen wir die notwendigen und hinreichenden Kriterien für Tiefpunkte ab und lassen das dann einfach so stehen.

Aber wir schweifen ab. Wir wollten noch überprüfen, ob die Aufgabe eine echte Kapitänsaufgabe ist. Wurden wirklich alle gegebenen Informationen verwendet, und wurden diese ohne weiteres Nachdenken in irgendwelchen Berechnungen verwendet? Wir haben die Koordinaten des Wendepunktes benötigt, um die Höhe des Dreiecks zu bestimmen. Und wir haben die Nullstelle der Tangente benötigt, sowie den Funktionsterm für die Normale, um die Grundseite zu bestimmen.

Wir haben demnach alles benutzt, was in der Aufgabe gegeben ist. Bis auf eins. Die Funktion f_k. Die haben wir an keiner Stelle verwendet. Wir mussten nur einen Eckpunkt des Dreiecks selbst berechnen. Die anderen beiden waren vorgegeben. Und diesen einen Eckpunkt haben wir als Nullstelle einer vorgegebenen linearen Funktion gefunden. Kurz gesagt: Wir hätten die Funktion f_k, die in der Aufgabe angeblich *betrachtet* wird, getrost ignorieren können.

Immerhin, das ist etwas neues. Bis jetzt war es üblich und erwünscht, manchmal sogar zwingend erforderlich, in einer sogenannten *Anwendungsaufgabe*, in der einschlägigen Literatur auch *Modellierungsaufgabe* genannt, den Sachkontext zu ignorieren. Nur so war man sicher, die Lösung zügig zu finden und sich nicht zu verzetteln. Nun werden offenbar auch Aufgaben ohne Anwendungsbezug gestellt, bei denen mit der gleichen Strategie vorzugehen ist. Als erstes muss genau das ignoriert werden, was in der Aufgabe angeblich betrachtet wird, hier also die eingangs definierte Funktion f_k.

Ansonsten besteht die Gefahr, einen unnötig schwierigen und langwierigen Lösungsweg einzuschlagen. Dann hätte der Schüler womöglich viel Zeit damit verbracht, die Gleichung für die Tangente aufzustellen und deren Nullstelle zu finden. Er hätte womöglich darüber nachgedacht, wie man eine Normale konstruiert. Ganz zu schweigen von dem Aufwand und den fachlichen *Kompetenzen*, die er hätte aufbringen müssen, um den Wendepunkt zu finden.

Aber wären das nicht genau die *Kompetenzen* gewesen, um die es in der Prüfung gehen soll? Wurde das CAS nicht genau zu dem Zweck eingeführt, um solche Aufgaben und die darin enthaltene *eigentliche Mathematik* zugänglich zu machen, auch wenn sie komplizierte verschachtelte e-Funktionen enthalten? Sollte das CAS nicht das irrelevante *Kalkül* übernehmen, also den für das Verständnis von Mathematik unbedeutenden Kleinkram, Terme umformen und Gleichungen lösen, damit sich der Schüler dem Kern der Sache widmen kann?

Warum nimmt man dem Schüler die Möglichkeit, zu zeigen, dass er diese *eigentliche Mathematik* beherrscht, indem man ihm das alles fertig hinschreibt? Und nach Art eines Lückentextes wahllos Bruchstücke eines vorgedachten Lösungsweges hinwirft, den er durch Rechnereingaben auszufüllen hat? Noch dazu die Bruchstücke, die vom mathematischen Gehalt eher in den Klassen 7 bis 10 angesiedelt sind: Lösen einer linearen Gleichung, Berechnen einer Dreiecksfläche, Bestimmen des Minimums einer Funktion, die im wesentlichen die Summe aus einer Zahl und ihrem Kehrwert ist. Für den letzten Schritt ist noch nicht einmal Differentialrechnung nötig. Wurzeln und binomische Formeln reichen da schon.

Da kommt der Verdacht auf, die Verzierung dieses recht flachen mathematischen Kerns mit einer verschachtelten e-Funktion und fast schon universitärmathematischen Ausdrücken wie ln(3) sei ein geplantes Ablenkungsmanöver. Wer die Aufgabe nur liest, soll den Eindruck haben: Ja, hier werden wirklich anspruchsvolle Oberstufeninhalte verlangt. Da kommen eine Exponentialfunktion und ein natürlicher Logarithmus vor. Dass man zum Lösen der Aufgabe gar nicht wissen muss, was das überhaupt ist, erschließt sich nur dem, der die Aufgabe auch bearbeitet. Und wer von denen, die davon schwärmen, wie anspruchsvoll das moderne Mathematikabitur ist, tut das schon?

Und ganz nebenbei wird durch die geschickte Aufgabenstellung noch etwas verhindert. Obwohl ein guter Schüler in Klasse 9 vermutlich in der Lage wäre, jeden der oben genannten Lösungsschritte auszuführen, kann er diese Aufgabe nicht lösen, Denn er weiß nicht, dass man dafür gar nicht wissen muss, was e und ln bedeuten, oder was Wendepunkte und Tangenten sind. Es würde zwar genügen, zu wissen, dass e irgendeine Zahl, ln irgendeine Funktion, ein Wendepunkt irgendein Punkt und eine Tangente irgendeine Gerade ist. Dann liest sich die Aufgabe nämlich so: Von einem Dreieck sind zwei Ecken gegeben, und die dritte Ecke ergibt sich als Nullstelle einer linearen Funktion. Die Fläche des Dreiecks soll minimal werden.

Aber um diese eigentliche Aufgabe zu erkennen, müsste der Schüler in der Lage sein, den ganzen unnötigen Krempel zu entfernen. Er müsste in der Lage sein, durch den Wirrwarr der Begriffe und Symbole, die für die eigentliche Aufgabe irrelevant sind, hindurchzuschauen. Aber das erfordert ein Abstraktionsvermögen, das in der Schulmathematik nicht vorgesehen ist. Ein Schüler, der am Ende der 10. Klasse eine ganzrationale Funktion vierten Grades ableiten kann, aber eine ganzrationale Funktion fünften Grades erst ein Jahr später, so wie es im Lehrplan vorgesehen ist, besitzt jedenfalls sicher nicht die Abstraktionsfähigkeit, die dazu nötig wäre.

Natürlich wird das so auch nicht von einem Schüler in der 9. Klasse erwartet. Niemand würde ihm eine Aufgabe so wie diese hier stellen. Außer vielleicht ein Hochschuldidaktiker, sei es nun ein Mathematiker oder ein Biologe, der herausfinden möchte, ob man Abituraufgaben mit den Kenntnissen aus der 9. Klasse lösen kann. Kann man natürlich nicht, wenn sie so formuliert sind, dass der Schüler sie zwar lösen könnte, aber nicht versteht. Das ist sehr praktisch. Denn so kann niemand Zweifel am hohen Niveau des Abiturs anmelden. Und es ist wie in der echten Mathematik. Die größten und berühmtesten mathematischen Probleme kann jeder, der einmal in der Schule war, ohne große Probleme lösen. Aber die größten Mathematiker brauchen manchmal 300 Jahre, um sie zu verstehen. Oder war das umgekehrt?

Wir schweifen schon wieder ab. Was also ist der Grund, eine zwar nicht besonders geistreiche, aber durchaus anspruchsvolle Aufgabe, die grundlegende Kenntnisse der Analysis erfordert, derart zu Verhackstücken und ihres mathematischen Kernes zu berauben? Warum nicht einfach so: Funktion f_k gegeben, aus Tangente und Normale im Wendepunkt ein Dreieck konstruieren, minimales Dreieck gesucht? Vielleicht hat der ursprüngliche Erfinder der Aufgabe genau das im Sinn gehabt. Ein Schüler, der die *eigentliche Mathematik* beherrscht und das CAS als Hilfsmittel hat, um das erforderliche *Kalkül* zu bewältigen, müsste das doch hinbekommen.

Aber so geht das natürlich nicht. Nachdem die Aufgabe erfunden war, hat eine Expertenkommission getagt und festgestellt: Die Aufgaben müssen anspruchsvoll ~~sein~~ aussehen und den Vorgaben des Kerncurriculums entsprechen. Aber es muss ausgeschlossen werden, dass der Umfang der Aufgaben und die Aufgabendichte möglicherweise für die vorgegebene Zeit etwas zu hoch ist. Um dies sicherzustellen, wurde die Aufgabe, oder vielmehr die vorgesehene Lösung in siebenundvierzigeinhalb Teilschritte zerlegt. Jedem solchen Bruchstück wurde ein Platz in einem achtdimensionalen *Kompetenzraster* zugeordnet.

Dieses Raster wurde anschließend mit den vom Institut zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen zu den Bildungstandards für die allgemeine Hochschulreife weiterentwickeln einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung abgeglichen. Und daraufhin wurden diejenigen Schritte ausgewählt, die der Schüler tatsächlich selbst ausführen muss, um seine Kompetenzen nachzuweisen. Und damit der Schüler auf keinen Fall mehr als exakt diese Kompetenzen nachweist, wurden alle anderen Schritte durch ein Sammelsurium an eingestreuten Informationen vorgegeben.

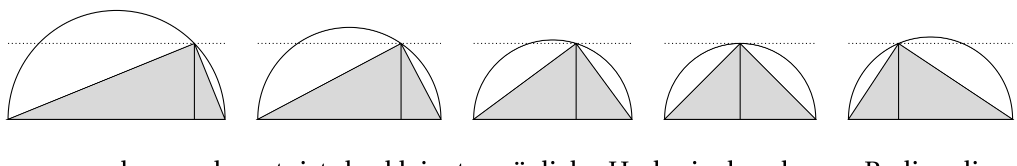
Das führt zwar zu einer scheinbar unmotivierten Auswahl solcher Informationen. Warum, so fragt man sich, wurde für die Tangente die Nullstelle, für die Normale aber die Funktionsgleichung angegeben? Dem Experten erschießt sich aber sofort der tiefere Sinn. Hier soll die Kompetenz L13/K53/A2 genau einmal vorgeführt werden, damit das fein austarierte Kartenhaus des mit den Handreichungen für Lehrer tatsächlich mitgelieferten Kompetenzrasters nicht zusammenfällt. Wahrscheinlich war es nur ein Unfall, dass dabei das eigentliche Thema der Aufgabe, also die spezielle Funktion f_k, verloren gegangen ist.

Darüber hinaus bestünde ohne die Hilfestellungen die Gefahr, dass der Schüler einen eigenen, von den Vorgaben abweichenden Lösungsweg entwickelt. Das geht natürlich erstens nicht, weil diese Art von Kreativität keine im Katalog vorgesehene Kompenenz ist. Und zweitens natürlich schon gar nicht, weil dieser Schüler die für diese Aufgabe planmäßig vorgesehenen Kompetenzen nicht mehr anderswo nachweisen kann, also sein Abitur quasi ermogeln würde.

Dass diese Gefahr tatsächlich besteht, sehen wir, wenn wir uns einmal vorstellen, die Aufgabe würde tatsächlich ohne jede Hilfestellung daherkommen. Dann würde ein Schüler, der die *eigentliche Mathematik* beherrscht, vielleicht so argumentieren: In der Funktionsgleichung erkennt man, dass der Funktionswert nur vom Produkt $k \cdot x$ abhängt. Also bewirkt eine Variation von k eine Streckung bzw. Stauchung des Graphen in x-Richtung. Wenn der Graph immer genau einen Wendepunkt hat, dann kann sich dieser Punkt folglich nur auf einer horizontalen Geraden bewegen. Die Höhe unseres rechtwinkligen Dreiecks hängt nicht von k ab.

Durch die Streckung oder Stauchung ändern sich jedoch die Steigungen von Tangente und Normale im Wendepunkt. Damit ändern sich die Winkel zwischen den Katheten und der Hypotenuse des Dreiecks. Da k beliebige positive Werte annehmen kann, können wir jeden gewünschten Winkel durch eine geeignete Streckung oder Stauchung einstellen. Man könnte das alles noch ein bisschen genauer ausführen, aber es ist offensichtlich, dass die Frage nun auch so fomuliert werden kann: Gibt es unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit fester Höhe eines mit minimaler Fläche? Oder, da sich die Höhe nicht ändert: Gibt es unter allen rechtwinkligen Dreiecken mit fester Höhe eines mit minimaler Hypotenuse?

Ja, das gibt es natürlich, nämlich das gleichschenklige Dreieck. Der Beweis kommt fast ohne Worte aus, wenn man feststellt, dass die Hypotenuse auch der Durchmesser des Um- bzw. Thaleskreises ist:



Wie man unschwer erkennt, ist der kleinste mögliche Umkreis der, dessen Radius die vorgegebene Höhe ist, und das Dreieck ist in diesem Fall ein gleichschenkliges. Damit ist die Frage nach dem minimalen Dreieck beantwortet. Und da die ursprüngliche Aufgabe nur nach dessen Existenz fragt, auch diese.

Nun hätten wir ein riesiges Problem. Dieser Schüler hätte die Aufgabe gelöst, ohne auch nur eine einzige der laut Raster erwarteten Kompetenzen zu demonstrieren, ganz zu schweigen davon, dass er seinen CAS-Rechner noch nicht einmal angeschaut hätte. Statt dessen hätte er nur ganz grundlegende Eigenschaften von Funktionen und ihren Graphen, und ein bisschen elementare Geometrie verwendet. Er hätte gewissermaßen durch seine ausgeprägten mathematischen Fähigkeiten die Prüfer an der Nase herumgeführt. Sein Schicksal, oder jedenfalls sein Abitur, würde nun davon abhängen, ob die Referenten eine solche Unverfrorenheit durchgehen lassen würden oder nicht.

Das wäre eine für allen Seiten unbefriedigende Situation, die durch die vielfältigen Hilfestellungen weitestgehend verhindert wird. Denn sie sind in Wirklichkeit gar keine Hilfestellungen, sondern Anweisungen, einen ganz bestimmen Lösungsweg einzuschlagen. Kaum ein Schüler wird es wagen, diese zu missachten, und einfach die gestellte Frage beantworten. Zumal die auch gar nicht als Frage, sondern als Anweisung, etwas zu *untersuchen* daherkommt. Da weiß der Schüler, dass er hier nicht nachdenken, sondern etwas machen soll, also am besten irgendein Standardprogramm abspulen. So wie ein Arzt, der untersuchen soll, ob der Patient die Blutgruppe A haben kann. Da gibt es auch nichts nachzudenken. Außer vielleicht darüber, was die merkwürdige Frage bedeuten soll. Jeder kann Blutgruppe A haben.

Beschließen wir also diesen Aufsatz mit einer ebenso faszinierenden wie vielversprechenden Erkenntnis. Diese wunderschöne Prüfungsaufgabe, die wir hier noch einmal in ihrer vollen Pracht präsentieren:

Unabhängig vom Sachzusammenhang wird im Folgenden die Funktionenschar f_k mit

$f_k(x) = \dfrac{10}{1+9\cdot e^{-10\cdot k\cdot x}}$, $x \in \mathbb{R}$, $k > 0$, betrachtet.

d) Für jedes $k > 0$ bezeichnet t_k die Tangente an den Graphen von f_k im Wendepunkt $W_k\left(\dfrac{\ln(3)}{5\cdot k}\middle|\,5\right)$.

Die Tangente t_k hat die Nullstelle $x = \dfrac{\ln(3)-1}{5\cdot k}$. Zu jeder Tangente t_k existiert eine zu t_k senkrechte Gerade y_k mit $y_k(x) = -\dfrac{1}{25\cdot k}\cdot x + 5 + \dfrac{\ln(3)}{125\cdot k^2}$, die ebenfalls durch W_k verläuft. Für jedes $k > 0$ schließen die Tangente t_k, die Gerade y_k und die x-Achse ein Dreieck ein.

Untersuchen Sie, ob der Flächeninhalt dieses Dreiecks minimal werden kann.

Diese Aufgabe ist also die für die moderne, anwendungs-, kompetenz- und medienorientierte Schulmathematik optimierte Übersetzung einer Frage, die ein rückwärtsgewandter, fortschrittsfeinlicher Professor aus dem letzten Jahrhundert in seiner antiquierten und abstrakten Sprache so formuliert hätte:

Welches unter allen höhengleichen rechtwinkligen Dreiecken hat die kleinste Fläche?

Und das ist noch nicht einmal die wirklich große Errungenschaft der modernen mathematischen Didaktik. Der wahre Fortschritt besteht darin, dass ein Schüler diese Aufgabe in ihrer modernen Version dank der ihm zur Verfügung stehenden technischen Hilfsmittel lösen kann, ohne diese jahrhunderalten, verstaubten, Speicherplatz im Gehirn beanspruchenden, der Lebenswelt des Schülers entrückten Altbestände der Schulmathematik ausgraben zu müssen. Wie zum Beispiel die elementare Geometrie.

Statt dessen löst er sein Problem elegant und sicher, indem er die vorgegebenen Terme sorgfältig in seinen Rechner eingibt, und dessen Ausgaben auf die im Unterricht vereinbarte Weise dokumentiert. Und dazu muss er noch nicht einmal wissen, *was* er da eigentlich gerade wirklich untersucht hat. Das ist irgendwo tief unter den Gleichungen in seinem Rechner vergraben und belastet sein Gehirn nicht. Seine Zukunft als innovativer Unternehmer, kreativer Ingenieur oder frei denkender Wissenschaftler ist damit gesichert. Und so natürlich auch die Zukunft unserer auf frische geistige Resourcen angewiesene Gesellschaft. Hurra.

PS: Ja, der Autor hat ein bisschen gemogelt und eine Teilaufgabe unterschlagen. Aber nicht aus böser Absicht, sondern um den Lesefluss nicht unnötig zu bremsen. Da war noch eine zweite Anweisung:

> Bestimmen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes aller Tangenten t_k .

Das macht es aber auch nicht besser. Man könnte argumentieren, dass man dafür zumindest die Ableitung der Funktion f_k im Wendepunkt braucht, um die Gleichung der Tangente t_k aufzustellen. Das würde zwar auch der Rechner machen, aber immerhin müsste man dazu die Funktion f_k, um die sich hier angeblich alles dreht, wirklich verwenden. Aber nötig ist das nicht, denn es sind ja zwei Punkte vorgegeben, die auf der Tangente liegen: der Wendepunkt und die Nullstelle. Die Funktion f_k kann demnach auch hier ignoriert werden.

Außerdem würde unser schlauer Schüler von oben erkennen: Da k nur eine Streckung des Funktionsgraphen und damit auch der Wendetangente in x-Richtung bewirkt, haben alle Tangenten den gleichen Schnittpunkt mit der y-Achse. Die Bestimmung der y-Koordinate des gemeinsamen Punktes reduziert sich damit auf einen Dreisatz. Auch hier gilt: Wer die Aufgabe auf dem vorgesehen Weg durch Einsatz des CAS löst, zeigt eben gerade nicht, die *eigentliche Mathematik* zu beherrschen, sondern erschlägt diese mit dem Rechner.